***В.И. Родионов***
***Н.В. Родионова***
***Н.М. Мамаев***

# ОБ ЭКОНОМИЧНЫХ АЛГОРИТМАХ ПОСТРОЕНИЯ НУЛЕВОЙ ИТЕРАЦИИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ПРОСТЕЙШИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В качестве нулевого приближения к точному решению трех краевых задач для простейших уравнений математической физики предлагается оптимальный аппроксимирующий сплайн, дающий наименьшую невязку в пространстве двумерных сплайнов лагранжевого типа, представляющую собой норму в пространстве $L_2$. Эти три задачи являются типичными моделями для многих научно-технических, фундаментальных и прикладных проблем. Во всех трех случаях для коэффициентов сплайна и для его невязки единообразным способом получены точные формулы. Формула для невязки представляет собой сумму двух положительно определенных квадратичных форм от конечных разностей дискретно заданных начальных данных. Коэффициенты форм вычислимы через многочлены Чебышёва. Получен устойчивый алгоритм численного решения задач, имеющий линейную вычислительную сложность.

*Ключевые слова: многомерный сплайн, негладкий сплайн, аппроксимирующий сплайн, интерполяция, многочлены Чебышёва.*

Работа относится к актуальной тематике поиска новых дискретизаций краевых задач с последующим экономичным решением разностных задач. Она развивает теорию итерационных методов решения краевых задач математической физики, позволяющих моделировать начальные приближения разностных задач. В докладе обсуждается специальный метод [1, 2] построения разностных схем [3] для трех краевых задач для двумерных уравнений математической физики: уравнения теплопроводности, волнового уравнения и уравнения Лапласа. Эти задачи являются типичными моделями для многих научно-технических, фундаментальных и прикладных проблем. На первом этапе метода осуществляется декомпозиция задачи, разбивающая исходную задачу на три подзадачи. Решение одной из подзадач носит элементарный характер. На втором этапе в каждой из оставшихся двух подзадач в качестве нулевого приближения к точному решению краевой задачи для того или иного уравнения математической физики предлагается оптимальный аппроксимирующий сплайн. Он дает наименьшую невязку в конечномерном пространстве двумерных сплайнов лагранжевого типа, представляющую собой норму в пространстве $L_2$. (Предлагаемый метод допускает обобщение на пространство специальных многомерных сплайнов произвольной степени, см., например, трехмерную задачу в [4].) Третий этап метода допускает применение к полученному нулевому приближению известных итерационных методов.

В рамках метода на втором этапе вычисления коэффициентов оптимального сплайна функционал невязки преобразуется в положительно определенную квадратичную форму от N переменных (параметр N – сколь угодно большое число). Далее определяется точка экстремума функционала: во всех трех задачах для координат этой точки удается получить точные формулы, выраженные в терминах многочленов Чебышёва 2-го рода. Наконец, вычисляется значение функционала в данной точке: во всех трех задачах для этого значения получены точные формулы, выраженные в терминах многочленов Чебышёва 1-го рода, представляющие собой сумму двух положительно определенных квадратичных форм. Элементами форм являются конечные разности дискретно заданных начальных условий исходной краевой задачи. Матрицы форм обратимы и таковы, что обратные к ним матрицы имеют трехдиагональный вид; эта особенность позволяет получить для спектров матриц верхние и нижние оценки и показать, что невязка стремится к нулю с ростом N. Алгоритм имеет линейную сложность вычислений по N, и он устойчив, – справедлива непрерывная зависимость от входных данных.

(В процессе реализации второго этапа во всех трех задачах получена система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов оптимального сплайна. Показано, что она имеет единственное решение. Численное решение системы сводится к реализации метода прогонки.)

Разработан комплекс программ, реализующий численные методы построения нулевой итерации, в том числе, численные методы, позволяющие проводить вычислительные эксперименты на объемной совокупности регулярных данных (архив данных хранится на кафедре информатики и математики Удмуртского государственного университета) и осуществлять сравнительный анализ качества аппроксимации нулевой итерации

Предлагаемый подход к дискретизации краевых задач математической физики может найти применение при исследовании дифференциальных уравнений с различными нелокальными краевыми условиями, см., например, постановку нелокальной краевой задачи [5], возникающей в теории плазмы, и современные работы [6–8]. Результаты работы могут быть перенесены в теорию многосеточных методов [9, 10], в математическую теорию обобщенных функций [11], ориентированную на методы конечных разностей и конечных элементов, в теорию параллельного программирования [12]. Метод может быть адаптирован в учебный процесс в рамках образовательных программ физико-математических и технических направлений подготовки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Родионов В.И. О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в численном анализе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 146–153.
2. Родионов В.И. Об одном методе построения разностных схем // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18.

Вып. 5. С. 2656–2659.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
4. Мзедавее А.Н., Родионов В.И. Точное решение одной задачи оптимизации, порожденной трехмерным уравнением Лапласа // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 51. С. 52–78.
5. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
6. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. I // СМФН. 2007. Т. 26. С. 3–132.
7. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. II // СМФН. 2009. Т. 33. С. 3–179.
8. Volkov E.A., Dosiyev A.A. On the numerical solution of a multilevel nonlocal problem // Mediterr. J. Math. 2016. Vol. 13. № 5. P. 3589–3604.
9. Hackbusch W. Multi-grid methods and applications. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 391 p.
10. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Параллельный многосеточный метод для решения эллиптических уравнений // Матем. моделирование. 2014. Т. 26. № 1. С. 55–68.
11. Jovanovic B.S., Suli E. Analysis of finite difference schemes: for linear partial differential equations with generalized solutions. London: Springer, 2014. 422 p.
12. Vajtersic M. Algorithms for elliptic problems: efficient sequential and parallel solvers. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. 310 p.

Родионов Виталий Иванович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики и математики
Удмуртский государственный университет
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Родионова Надежда Витальевна
Удмуртский государственный университет
E-mail: Nadezda240986@yandex.ru

Мамаев Никита Михайлович
Удмуртский государственный университет
E-mail: rodionov@uni.udm.ru